Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 3
Prof. Dr. G. Wang — 5.11.2012
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei μ ein äußeres Maß auf X. Zeigen Sie

$$\mu(A \triangle B) = 0 \quad \text{impliziert} \quad \mu(A) = \mu(B).$$

Sei weiterhin $(A_i) \subset X$ eine Folge von Mengen, und es konvergiere $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. Zeigen Sie

$$\lim_{\imath \to \infty} \mu(A_i \triangle A) = 0 \quad \text{impliziert} \quad \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(A).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X = \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ und $\mathcal{M}$ das Mengensystem, welches aus allen Mengen der Gestalt $M = \mathbb{Q} \cap (a, b]$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ besteht. Sei $f : \mathcal{M} \to [0, 1]$ definiert durch $f(\mathbb{Q} \cap (a, b]) = b - a$. Zeige, dass f nicht σ-additiv ist.

.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{J} := \{(a; b]; a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ der Halbring der links-offenen, rechts-abgeschlossenen Intervalle.

(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine wachsende Funktion (d.h., $F(x) \leq F(y)$ für $x \leq y$). Zeigen Sie, dass durch $I_F((a; b]) := F(b) - F(a)$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{J}$ definiert wird.

(b) Seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsende Funktionen. Zeigen Sie, dass $I_F = I_G$ genau dann, wenn $F - G$ konstant ist.

(c) Sei I ein endlicher Inhalt of $\mathcal{J}$ und definiere $F_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_I(x) := \begin{cases} I((0, x]), & \text{für } x \geq 0 \\ -I((x, 0]), & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F_I wachsend ist und $I_{F_I} = I$ gilt.

(d) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend. Zeigen Sie $F = F_{I_F} + F(0)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(\mu_n)_n$ eine isotone Folge von Prämaßen auf einem Ring $\mathcal{R}$, d.h. $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mu(A) := \lim_{n \to \infty} \mu_i(A)$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ definiert.

– –

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 12.11 bis 12:00**.